Université Claude Bernard - ENS Lyon
Groupe de travail : Bloch's lectures on algebraic cycles

THÉORÈME DE ROJTMAN I

F. DÉGLISE

Table des matières

1. Énoncé et principe de la preuve

On reprend les notations de l'exposé de l'introduction du livre de Bloch. On rappelle donc que pour un k-schéma algébrique X, on note :
- $A_0(X)$ désigne le groupe des 0-cycles algébriquement équivalents à 0 modulo les 0-cycles rationnellements équivalents à 0 ; [1]
- $\mathrm{Alb}(X)$ la variété d'Albanese de X ; [2]

Théorème 1.1. *Soit X un schéma projectif lisse sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p.*

Alors, le morphisme canonique

$$\Theta : A_0(X) \to \mathrm{Alb}(X)$$

induit un isomorphisme sur les sous-groupes de torsion première à p.

Quelques remarques préliminaires :

(1) Si un élément de $CH_0(X)$ est de torsion, il est nécessairement de degré 0. Autrement dit, on peut remplacer dans l'énoncé précédent le groupe $A_0(X)$ par $CH_0(X)$.

(2) Pour tout entier r et tout groupe A, on note A_r le sous-groupe de A des éléments annulés par r. Le théorème se reformule en disant que l'application induite par Θ :

$$\Theta_n : A_0(X)_r \to \mathrm{Alb}(X)_r$$

est un isomorphisme. Ce résultat implique en particulier que le groupe $A_0(X)_r$ est fini, contrastant avec ce que l'on sait déjà pour la partie rationnelle sur $\mathbb{C}$.

1.2. *Principe de la preuve.*– Le principe de la preuve de Bloch est très simple :

Date: Octobre 2016.

1. rappelons que si k est algébriquement clos, ce groupe coïncide avec le groupe de Chow des 0-cycles de degré 0.

2. on rappelle que c'est la variété abélienne universelle munie d'un morphisme :

$$X \to \mathrm{Alb}(X).$$

– on montre que le morphisme Θ_r est surjectif.
– on construit un morphisme surjectif

$$\mathrm{Alb}(X)_r \to A_0(X)_r$$

dans le cas particulier $r = l$ est premier.

Cela conclut car en on en déduit que $A_0(X)_l$ est fini, et nécessairement de même cardinal que $\mathrm{Alb}(X)_l$. Donc les deux applications précédentes sont des isomorphismes. Pour obtenir que Θ_r est un isomorphisme, il suffit maintenant d'utiliser le fait que $A_0(X)$ est un groupe divisible.

On déjà vu le résultat suivant, mais je rappelle brièvement la preuve.

Lemme 1.3. *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'application Θ_r est surjective.*

Démonstration. Le résultat est clair pour les courbes car dans ce cas, Θ est déjà un isomorphisme (théorème d'Abel-Jacobi rappelé dans l'exposé introductif).

On raisonne par induction sur la dimension de X. Supposons donc $\dim(X) > 1$. Pour une section hyperplane générale $i : Y \to X$, donc en particulier lisse, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A_0(Y)_r \arrow[r, "(\Theta_Y)_r"] \arrow[d, "i_*"'] & \mathrm{Alb}(Y)_r \arrow[d, "i_*"', "(1)"] \\ A_0(X)_r \arrow[r, "(\Theta_X)_r"] & \mathrm{Alb}(X)_r \end{tikzcd}$$

par construction de Θ et d'après la propriété universelle de la variété d'Albanese.

La variété d'Albanese est la variété abélienne duale de la variété de Picard $\mathrm{Pic}^0(X)$. En particulier on dispose d'un accouplement de Weil sur les points de r-torsions :

$$\mathrm{Alb}(X)_r \otimes \underline{\mathrm{Pic}}^0(X)_r \to \mu_r$$

– où μ_r désigne le groupe des racines r-ème de l'unité de k – qui induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Alb}(X)_r \simeq \mathrm{Hom}\left(\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)_r, \mu_r\right).$$

Utilisant l'isomorphisme :

$$\mathrm{Pic}(X)_r \simeq H^1_{\text{ét}}(X, \mu_r),$$

on en déduit donc une surjection canonique :

$$H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/r)^\vee \simeq \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}(X)_r, \mu_r\right) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Pic}^0(X)_r, \mu_r\right) \simeq \mathrm{Alb}(X)_r.$$

L'accouplement de Weil est essentiellement donné par un produit d'intersection. La formule de projection classique montre que la diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Z}/r)^\vee \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(i^*)^\vee"'] & \mathrm{Alb}(Y)_r \arrow[d, "i_*"', "(1)"] \\ H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/r)^\vee \arrow[r, two heads] & \mathrm{Alb}(X)_r \end{tikzcd}$$

D'après le théorème de connexion de Zariski, le morphisme

$$i^* : H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/r) \to H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Z}/r)$$

est injectif.[3] On en déduit que la flèche (1) du diagramme précédent est surjective et l'hypothèse d'induction permet donc de conclure. □

3. Pour être plus précis, on applique [Har77, III, 7.9] pour déduire que si V/X est un revêtement étale connexe cyclique de X, d'ordre r, son image inverse sur Y est encore un revêtement étale connexe. La classe de $V \times_X Y$ dans $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Z}/r)$ ne peut donc pas être triviale si $[V]$ est non triviale.

2. Méthode de Bloch et torsion du groupe de Chow

2.1. *Suite spectrale du niveau.*– Généralisons légèrement ce qu'on a vu dans l'exposé précédent. On considère une théorie cohomologique bigraduée à support (définie sur les paires (X, Z) où X est un k-schéma algébrique et Z un fermé de X) :

$$(X, Z) \mapsto H^{n,m}(X, Z) = H_Z^{n,m}(X);$$

avec des suites exactes canoniques naturelles par rapport au pullback :

$$H_Z^{n,m}(X) \xrightarrow{i_!} H^{n,m}(X) \xrightarrow{j^*} H^{n,i}(X - Z) \xrightarrow{\partial_i} H^{n+1,m}(Z)$$

où l'on a posé : $H^{n,m}(X) := H^{n,m}(X, X)$. On demande que cette cohomologie soit pure dans le sens suivant : si X et Z sont lisses, Z de codimension pure c dans X, on dispose d'un isomorphisme :

$$H_Z^{n,m}(X) \to H^{n-2c,m-c}(Z)$$

naturel par rapport à la fonctorialité contravariante.

Alors, on associe à la cohomologie H^* et à un k-schéma lisse X une suite spectrale dite *du coniveau* :

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p,m-p}(x) \Rightarrow H^{p+q,m}(X)$$

où l'on a posé pour $x \in X$, d'adhérence réduite Z dans X :

$$H^{q-p,m-p}(x) = \varinjlim_{U \subset Z} H^{q-p,m-p}(U)$$

avec U parcourant les ouverts non vides de Z.

Les lignes de cette suite spectrale forment donc une famille de complexes :

$$C^*(X, \hat{H}^{q,m}) := \dots \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p,m-p}(x) \to \bigoplus_{y \in X^{(p+1)}} H^{q-p-1,m-p-1}(y) \dots$$

indexée par les couple d'entier (q, m), que l'on appelle *complexes de Gersten* associés à la cohomologie H^{**}.

Exemple 2.2. Dans la preuve de Bloch, on utilise la suite spectrale du coniveau pour les théories cohomologiques suivantes :

– La K-théorie algébrique de Quillen :

$$K^{n,m}(X, Z) = K_{2m-n}^Z(X),$$

version à support. On notera en particulier que la cohomologie $K^{*,*}$ est $(2, 1)$-périodique, ce qui est le pendant algébrique de la périodicité de Bott classique pour la K-théorie topologique.[4]

– la cohomologie étale de $\mathbb{Z}/r$-torsion :

$$H_{\text{ét}}^{n,m}(X, Z) = H^n\big(X_{\text{ét}}, i^!(\mu_{r,Z}^{\otimes m})\big)$$

où i est l'inclusion de Z dans X.

Remark 2.3. Si l'on remplace ces axiomes par le suivant (plus fort) :
H^* vient d'un foncteur de réalisation

$$H : \mathrm{DM}_{gm}(k)(k)^{op} \to \mathscr{A}$$

alors, on peut même montrer que pour tout entier n fixé, le foncteur qui à une extension K/k de type fini et un entier $p \in \mathbb{Z}$ associe l'objet

$$\hat{H}^n(K)_p := \varinjlim_{U \subset X} H^{n+p,p}(U)$$

4. En particulier, cette périodicité est compatible à la réalisation complexe dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$.

où X est un k-schéma lisse intègre de corps des fonctions K et U parcourt les ouverts non vides de X, défini un module de cycles sur k et les complexes de Gersten associés à H^{**} sont canoniquement isomorphes aux complexes de Rost à coefficients dans $\hat{H}^q_*$: cf. [Dég14]. On peut formuler ce résultat plus précisément en disant que le terme E_2 de la suite spectrale précédente s'écrit :

$$E_2^{p,q} = A^p(X, \hat{H}^q)_{(m-p)} \Rightarrow H^{p+q,m}(X).$$

La suite spectrale s'interprète de plus comme une suite spectrale d'hypercohomologie (cf. *ibidem*).

On fera attention que l'hypothèse que H provient d'un foncteur de réalisation comme ci-dessus n'est pas assez générale pour s'appliquer à la K-théorie algébrique *à coefficients entiers*, car celle-ci ne définit pas un foncteur de source $\mathrm{DM}_{gm}(k)(k)$. Il faut généraliser la théorie ci-dessus aux *théories cohomologique orientées* de la théorie de l'homotopie motivique : cf. [Dég13].

Quoiqu'il arrive, la suite spectrale précédente est, de manière évidente, fonctorielle en H et cette remarque est à la base de la méthode de Bloch que nous allons présenter.

On rappelle le résultat suivant essentiellement du à Bloch et Ogus :

Théorème 2.4. *Considérons les hypothèses du paragraphe 2.1. Pour tout couple d'entiers (n,m), on note $\mathcal{H}^{n,m}$ le faisceau Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto H^{n,m}(U)$.*

Alors, le terme E_2 de la suite spectrale du coniveau associé à H est de la forme :

$$E_2^{p,q} = H^p_{Zar}(X, \mathcal{H}^{q,m}) \Rightarrow H^{p+q,m}(X).$$

Plus précisément, la faisceautisation Zariski du complexe de Gersten $C^*(-, \hat{H}^{q,m})$ sur X_{Zar} induit une résolution flasque

$$\mathcal{H}^{q,m} \to \underline{C}^*_X(-, \hat{H}^{q,m}).$$

2.5. Reprenant les exemples de 2.2, on rappelle les calculs suivants, valables pour tout corps K :

– $K_0(K) = \mathbb{Z}$, $K_1(K) = \mathrm{GL}(K)^{ab} = K^\times$,

$$K_2(K) = (K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times)/\{x \otimes (1-x) \mid x \neq 0, 1\}.\ [5]$$

– $H^{n,m}_{\text{ét}}(K)$ est la cohomologie en degré n du groupe de Galois absolu de K à coefficients dans le module galoisien $\mu_r(\bar{K})^{\otimes m}$. En particulier, le théorème dit « Hilbert 90 »affirme : $H^{1,1}_{\text{ét}}(K) = \mu_r(K)$.

On dispose donc de morphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} = K_0(K) &\to H^{0,0}_{\text{ét}}(K) = \mathbb{Z}/r, \\ K^\times = K_1(K) &\to H^{1,1}_{\text{ét}}(K) = \mu_r(K), \\ K_2(K) &\to H^{2,2}_{\text{ét}}(K), x \otimes y \mapsto x \cup y. \end{aligned}$$

5. C'est le théorème de Matsumoto.

Fixons un k-schéma lisse X. On peut vérifier que les morphismes précédents sont compatibles aux différentielles des complexes de Gersten associés à X ; pluis précisément, on obtient un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{z\in X^{(i-2)}} K_2(z) \arrow[r] \arrow[d, "\times r"] & \bigoplus_{y\in X^{(i-1)}} K_1(y) \arrow[r] \arrow[d, "\times r"] & \bigoplus_{x\in X^{(i)}} K_0(x) \arrow[r] \arrow[d, "\times r"] & 0 \\
\bigoplus_{z\in X^{(i-2)}} K_2(z) \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & \bigoplus_{y\in X^{(i-1)}} K_1(y) \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \bigoplus_{x\in X^{(i)}} K_0(x) \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\
\bigoplus_{z\in X^{(i-2)}} H^{2,2}_{\text{ét}}(z) \arrow[r] & \bigoplus_{y\in X^{(i-1)}} H^{1,1}_{\text{ét}}(y) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in X^{(i)}} H^{0,0}_{\text{ét}}(x) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2.5.a}$$

En utilisant les notations introduites dans le paragraphe 2.1, on peut réécrire plus succintement ce diagramme :

$$C^{*\geq i-2}(X, \hat{K}^{i,i}) \xrightarrow{\times r} C^{*\geq i-2}(X, \hat{K}^{i,i}) \to C^{*\geq i-2}(X, \hat{H}^{i,i}_{\text{ét}}) \to 0,$$

où la notation $* \geq i-2$ iniduqe que l'on a tronqué bêtement les complexes.

Tenant compte de la périodicité de la K-théorie, on peut réécrire cette suite de la manière suivante :

$$C^{*\geq i-2}(X, \hat{K}_i) \xrightarrow{\times r} C^{*\geq i-2}(X, \hat{K}_i) \to C^{*\geq i-2}(X, \hat{H}^{i,i}_{\text{ét}}) \to 0. \tag{2.5.b}$$

Il est clair que les deux colonnes verticales de droites forment des suites exactes d'après ce qui a été dit précédemment.

Remark 2.6. Une manière plus directe d'obtenir cette suite de complexes de Gersten est d'utiliser la réalisation étale des motifs.

En effet, la cohomologie motivique de Voevodsky est définie comme la cohomologie Zariski (ou Nisnevich) d'une famille de complexes (de cycles) $\mathbb{Z}(m)$:

$$H^{n,m}_M(X) := H^n_{\text{Zar}}(X, \mathbb{Z}(m))$$

où $\mathbb{Z}(m)$ est un complexe de faisceaux sur le site des k-schémas lisses.

On définit la *cohomologie motivique étale*, ou encore cohomologie de Lichtenbaum, comme la cohomologie étale du complexe de faisceaux étales associé à $\mathbb{Z}(m)$:

$$H^{n,m}_L(X) := H^n_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(m)).$$

Le morphisme entre les sites Nisnevich et étales de la catégorie des k-schémas lisses induit donc une transformation naturelle de cohomologie :

$$H^n(X, \mathbb{Z}(m)) \to H^n_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(m)).$$

On dispose par ailleurs d'une flèche naturelle de réduction modulo r et on en déduit :

$$H^n(X, \mathbb{Z}(m)) \to H^n_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/r(m)).$$

D'après les théorèmes fondamentaux de Suslin et Voevodsky :
- pour tout entier $n \geq 0$, et tout corps K, $H^n(K, \mathbb{Z}(n)) = K^M_n(K)$ où $K^M_*(K)$ est la K-théorie de Milnor de K [6]
- pour tout couple d'entier (n, m), on dispose d'un isomorphisme canonique fonctoriel :
$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/r(m)) \simeq H^n_{\text{ét}}(X, \mu_r^{\otimes m}).$$

6. Rappelons :
$$K^M_*(K) = T(K^\times)/\{x \otimes (1-x) \mid x \neq 0, 1\}$$
où $T(K^\times)$ désigne l'algèbre tensorielle associée au groupe abélien $K^\times$.

Ainsi, la suite de complexes 2.5.b est induite par la suite de transformations naturelles suivantes :

$$H^n(X,\mathbb{Z}(m)) \xrightarrow{\times r} H^n(X,\mathbb{Z}(m)) \to H^n_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/r(m)) \to 0.$$

Ce procédé est plus naturel car alors, on n'a plus besoin de tronquer les complexes de Gersten. Par ailleurs, le fait qu'on obtient bien des morphismes de complexes (*i.e.* le diagramme (2.5.a) est bien commutatif) est immédiat.

Pour la première suite verticale, rappelons le théorème suivant de Merkurjev-Suslin.

Théorème 2.7 (Merkurjev-Suslin)**.** *Pour tout corps K, la flèche*

$$K_2(K)/r \to H^{2,2}_{\acute{e}t}(K)$$

est un isomorphisme.

Un corollaire immédiat de ce théorème est donc :

Corollaire 2.8. *Pour tout k-schéma lisse X, la suite* (2.5.b) *de complexes de groupes abéliens est exacte.*

2.9. En particulier, on obtient une suite exacte d'homologie :

$$H^1(C^*(X,\hat{K}_i)) \xrightarrow{\times r} H^1(C^*(X,\hat{K}_i)) \to H^1(C^*(X,\hat{H}^{i,i}_{\text{ét}}) \to H^0(C^*(X,\hat{K}_i)) \xrightarrow{\times r} H^0(C^*(X,\hat{K}_i)).$$

Notons que $C^0(X,\hat{K}_i) = Z^i(X)$, groupe des cycles algébriques de codimension i. Un calcul de Quillen montre par ailleurs que la différentielle

$$\bigoplus_{y\in X^{(i-1)}} \kappa(y)^\times = C^1(X,\hat{K}_i) \to C^0(X,\hat{K}_i) = Z^i(X)$$

n'est autre que l'application diviseur. Autrement dit,

$$H^0(C^*(X,\hat{K}_i)) = CH^i(X).$$

Compte tenu du théorème 2.4, on peut donc réécrire la suite exacte ci-dessus comme suit :

Corollaire 2.10. *Pour tout k-schéma lisse X, il existe une suite exacte :*

$$0 \to H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)/r \to H^{i-1}(X,\mathcal{H}^{i,i}_{\acute{e}t}) \to CH^i(X)_r \to 0.$$

En particulier pour $d = \dim(X)$:

$$0 \to H^{d-1}(X,\mathcal{K}_d)/r \to H^{d-1}(X,\mathcal{H}^{d,d}_{\text{ét}}) \to CH^d(X)_r \to 0.$$

On a besoin d'un dernier calcul pour conclure.

Lemme 2.11. *Considérons les hypothèses du corollaire précédent. Alors, la suite spectrale du coniveau pour la cohomologie étale de torsion dégénère en $E_2^{d-1,d}$ et induit un isomorphisme :*

$$H^{d-1}(X,\mathcal{H}^{d,d}_{\acute{e}t}) \simeq H^{2d-1}_{\acute{e}t}\big(X,\mu_r^{\otimes d}\big).$$

Démonstration. D'après le théorème 2.4, la suite spectrale du coniveau en cohomologie étale a la forme suivante :

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{Zar}}(X,\mathcal{H}^{q,d}_{\text{ét}}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mu_r^d).$$

Par ailleurs, le terme

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} H^{q-p}_{\text{ét}}(\kappa(x),\mu_r^{d-p})$$

est concentré dans les degrés :

– $p \leq d$ (évident) ;
– $q - p \geq 0$ (évident).
– $q \leq d$ car pour tout $x \in X^{(p)}$, le corps $\kappa(x)$ est de dimension cohomologique inférieure à $d-p$, puisuque k est séparablement clos et $\kappa(x)/k$ est une extension de type fini de degré de transcendance égal à $d - p$; (on applique le théorème de Tsen).

La suite spectrale dégénère donc en $E_2^{d-1,d}$ et l'isomorphisme attendu est donné par le morphisme bord :

$$H^d_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{H}^{d-1,d}_{\text{ét}}) = E_2^{d-1,d} = E_\infty^{d-1,d} = H^{2d-1}_{\text{ét}}(X, \mu_r^d).$$

□

2.12. Jusqu'à présent, on a pu travailler avec la r-torsion. Pour le dernier résultat, on a besoin d'un argument de passage à la limite qui nous oblige à se concentrer sur la l-torsion pour un premier l.

Sépcialisant en $r = l^\nu$ la suite exacte du corollaire ci-dessus, jointe au calcul du lemme précédent, on obtient une suite exacte

$$0 \to H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d)/l^\nu \to H^{2d-1}(X, \mu_{l^\nu}^d) \to CH^d(X)_{l^\nu} \to 0.$$

Prenant la limite inductive suivant $\nu \geq 0$, on en déduit donc une suite exacte courte :

$$0 \to H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to H^{2d-1}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d)) \to CH^d(X)_{l-tor} \to 0.$$

Proposition 2.13. *Soit l un nombre premier et supposons X/k projectif lisse. Alors, il existe un isomorphisme canonique :*

$$H^{2d-1}_{\acute{e}t}\big(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d)\big) \simeq \mathrm{Alb}(X)_{l-tor}.$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord qu'il existe une suite exacte courte :

$$0 \to \underline{\mathrm{Pic}}^0(X) \to \underline{\mathrm{Pic}}(X) \to NS(X) \to 0$$

où $NS(X)$ est le groupe de Néron-Severi, qui est un groupe abélien de type fini d'après le théorème de Néron-Severi. On en déduit donc un isomorphisme sur les l-complétés :

$$T_l\left(\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)\right) \simeq T_l\left(\underline{\mathrm{Pic}}(X)\right) \tag{2.13.a}$$

car $\widehat{NS(X)} = 0$.

La dualité de Poincaré induit un accouplement parfait :

$$H^{2d-1}_{\text{ét}}(X, \mu_{l^\nu}^d) \otimes H^1_{\text{ét}}(X, \mu_{l^\nu}) \to H^{2d}_{\text{ét}}(X, \mu_{l^\nu}^{d+1}) \simeq \mu_{l^\nu}.$$

Comme $H^1_{\text{ét}}(X, \mu_{l^\nu}) = \underline{\mathrm{Pic}}(X)_{l^\nu}$, on en déduit après passage à la limite :

$$H^{2d-1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d)) \simeq \mathrm{Hom}\left(T_l\left(\underline{\mathrm{Pic}}(X)\right), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)\right). \tag{2.13.b}$$

Enfin, comme on l'a déjà vu dans la preuve du lemme 1.3, la dualité de Weil donne un accouplement parfait :

$$\mathrm{Alb}(X)_{l^\nu} \otimes \underline{\mathrm{Pic}}^0(X)_{l^\nu} \to \mu_{l^\nu}$$

qui induit après passage à la limite un isomorphisme :

$$\mathrm{Alb}(X)_{l-tor} \simeq \mathrm{Hom}\left(T_l\left(\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)\right), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)\right). \tag{2.13.c}$$

Les isomorphismes (2.13.a), (2.13.b), (2.13.c) donnent donc l'isomorphisme attendu.

□

2.14. *Conclusion.–* D'après les trois résultats précédents, on obtient donc une suite exacte :

$$0 \to H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to \mathrm{Alb}(X)_{l-tor} \to CH^d(X)_{l-tor} \to 0.$$

pour un premier $l \neq p$.

Ceci donne en particulier que pour tout $l \neq p$, une surjection :

$$\mathrm{Alb}(X)_l \to CH^d(X)_l = A_0(X)_l$$

qui permet de conclure que Θ_l est un isomorphisme de groupes finis. Comme $A_0(X)$ est un groupe divisible, on en déduit facilement le résultat final, pour tout la torsion première la caractéristique de k.

Corollaire 2.15. *Soit X un schéma projectif lisse sur un corps séparablement clos de caractéristique p.*

Alors, pour tout premier $l \neq p$, il existe des isomorphisme canonique :

$$CH_0(X)_{l-tor} \simeq H^{2d-1}_{ét}\big(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d)\big) \simeq \mathrm{Alb}(X)_{l-tor}.$$

Remark 2.16. Considérons la suite exacte de faisceaux l-adiques :

$$0 \to \mathbb{Z}_l(d) \to \mathbb{Q}_l(d) \to \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d) \to 0$$

Elle induit une suite exacte longue en cohomologie, et en particulier un morphisme bord :

$$H^{2i-1}_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i)\big) \xrightarrow{\beta} H^{2i}_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Z}_l(i)\big)$$

qu'on appelle le *morphisme de Bockstein.*

On peut vérifier que le morphisme β s'insère dans le diagramme commutatif suivant — voir [CT93], diagramme (3.8) avec des notations légèrement différentes :

$$\begin{tikzcd} H^{i-1}(X, \mathcal{H}^{i,i}_{\text{ét}}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)) \arrow[r, "(1)"] & CH^i(X)_{l-tor} \arrow[d, "\gamma_X"] \\ H^{2i-1}_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i)\big) \arrow[u, "(2)"] \arrow[r, "\beta"] & H^{2i}_{\text{ét}}\big(X, \mathbb{Z}_l(i)\big) \end{tikzcd}$$

où la flèche (1) est donnée par la suite exacte du Corollaire 2.10, la flèche (2) est donnée par la suite spectrale du coniveau pour la cohomologie étale comme dans le lemme 2.11, et γ_X désigne la classe de cycle en cohomologie étale.

Références

[CT93] Jean-Louis Colliot-Thélène. Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique. In *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, volume 1553 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–49. Springer, Berlin, 1993.

[Dég08] F. Déglise. Motifs génériques. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 119 :173–244, 2008.

[Dég13] F. Déglise. Orientable homotopy modules. *Am. Journ. of Math.*, 135(2) :519–560, 2013.

[Dég14] Frédéric Déglise. Suite spectrale du coniveau et t-structure homotopique. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 23(3) :591–609, 2014.

[Ful98] W. Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[GH94] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Voi02] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 of *Cours Spécialisés.* Société Mathématique de France, Paris, 2002.